【医Ⅰ】【工Ⅱ】

(1) $\triangle ABE$と直線$CD$でメネラウスの定理から

$$\frac{2}{1}\times\frac{2}{5}\times\frac{OA}{EO}=1 \Leftrightarrow \frac{OA}{EO}=\frac{5}{4}$$

$$\therefore \overrightarrow{\mathrm{AO}}=\frac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$$

$$=\frac{5}{9}\cdot\frac{2\vec{p}+3\vec{q}}{5}$$

$$=\frac{2\vec{p}+3\vec{q}}{9}$$ (答)

(2) $AB, AC$の中点をそれぞれ$M, N$とするとき

点$O$が$\triangle ABC$の外心となるとき

$AB\perp OM$…①かつ$AC\perp ON$…②

①から

$$0=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MO}}$$

$$=\vec{p}\cdot\frac{-5\vec{p}+6\vec{q}}{18}$$

$$=\frac{-5|\vec{p}|^2+6\vec{p}\cdot\vec{q}}{18}$$

$$\Leftrightarrow |\vec{p}|^2=\frac{6}{5}\vec{p}\cdot\vec{q}\cdots③$$

②から

$$0=\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{NO}}$$

$$=\vec{q}\cdot\frac{4\vec{p}-3\vec{q}}{18}$$

$$=\frac{4\vec{p}\cdot\vec{q}-3|\vec{q}|^2}{18}$$

$$\Leftrightarrow |\vec{q}|^2=\frac{4}{3}\vec{p}\cdot\vec{q}\cdots④$$

$$BC^2=|\vec{q}-\vec{p}|^2$$

$$=|\vec{q}|^2-2\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{p}|^2$$

$$=\frac{4}{3}\vec{p}\cdot\vec{q}-2\vec{p}\cdot\vec{q}+\frac{6}{5}\vec{p}\cdot\vec{q}$$

$$=\frac{8}{15}\vec{p}\cdot\vec{q}\cdots⑤$$

③④⑤より

$AB^2 : BC^2 : CA^2$

$= \frac{6}{5}\vec{p}\cdot\vec{q} : \frac{8}{15}\vec{p}\cdot\vec{q} : \frac{4}{3}\vec{p}\cdot\vec{q}$

$= 9:4:10$（答）

【医Ⅱ】【工Ⅲ】

$f(-x)=-f(x)$ ――――――①

$\{f(x)\}^2+\{f'(x)\}^2=1$ ――――――②

$f'(x+y)=f'(x)f'(y)-f(x)f(y)$ ――――――③

$f'(0)=1$ ――――――④

（１）①より　$f(-0)=-f(0) \iff 2f(0)=0 \iff f(0)=0$（答）

（２）①の両辺を$x$で微分して　$-f'(-x)=-f'(x)$

$f'(-x)=f'(x)$　よって$f'(x)$は偶関数（証終）

（３）③において　$x=\dfrac{u+v}{2}$，$y=\dfrac{u-v}{2}$ とすると

$$f'(u)=f'\left(\frac{u+v}{2}\right)f'\left(\frac{u-v}{2}\right)-f\left(\frac{u+v}{2}\right)f\left(\frac{u-v}{2}\right) \qquad \text{――――――⑤}$$

また　$x=\dfrac{u+v}{2}$，$y=-\dfrac{u-v}{2}$ とすると

$$\begin{aligned}f'(v)&=f'\left(\frac{u+v}{2}\right)f'\left(-\frac{u-v}{2}\right)-f\left(\frac{u+v}{2}\right)f\left(-\frac{u-v}{2}\right)\\&=f'\left(\frac{u+v}{2}\right)f'\left(\frac{u-v}{2}\right)+f\left(\frac{u+v}{2}\right)f\left(\frac{u-v}{2}\right) \qquad \text{――――――⑥}\end{aligned}$$

⑤－⑥より

$f'(u)-f'(v)=-2f\left(\dfrac{u+v}{2}\right)f\left(\dfrac{u-v}{2}\right)$（証終）

（４）（３）から

$f'(x+h)-f'(x)=-2f\left(x+\dfrac{h}{2}\right)f\left(\dfrac{h}{2}\right)$ であるので

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}&=\lim_{h\to 0}\left\{-f\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{f\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\right\}\\&=\lim_{h\to 0}\left\{-f\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{f\left(\frac{h}{2}\right)-f(0)}{\frac{h}{2}}\right\}\\&=-f(x)f'(0)\\&=-f(x)\end{aligned}$$

よって$f'(x)$は微分可能であり　$f''(x)=-f(x)$（証終）

【医Ⅲ】【工Ⅳ】

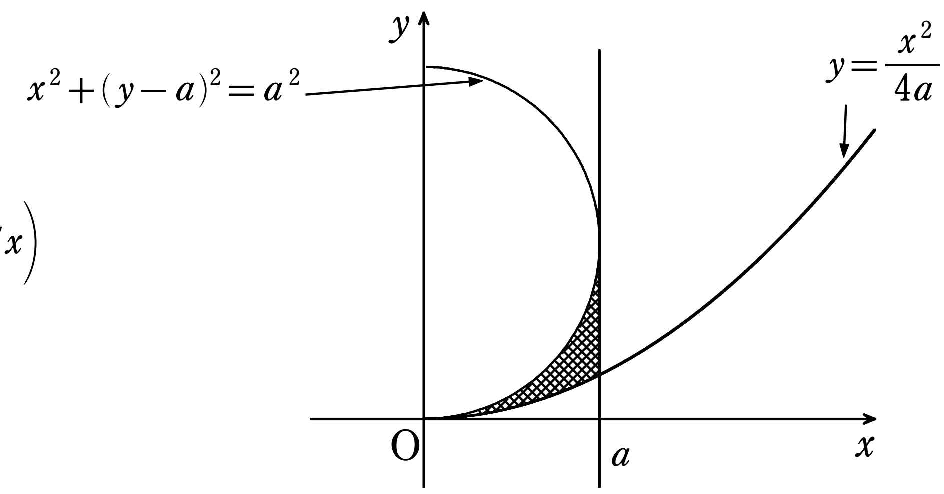
(1) 半円および$x$軸に接することから

$x>0,\ f(x)>0$

このとき、半円に接する円の半径は$f(x)$なので

$\sqrt{x^2+(f(x)-a)^2}=a+f(x)$

$\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{1}{4a}x^2\,(x>0)$（答）




(2) $S=a^2-\left(\dfrac{\pi}{4}a^2+\displaystyle\int_0^a\dfrac{x^2}{4a}dx\right)$

$=\left(\dfrac{11}{12}-\dfrac{\pi}{4}\right)a^2$（答）

(3) $V=\pi\displaystyle\int_0^a\left(a-\sqrt{a^2-x^2}\right)^2dx-\pi\int_0^a\left(\dfrac{x^2}{4a}\right)dx$

$=\left(\dfrac{397}{240}-\dfrac{\pi}{2}\right)a^3\pi$（答）

【医Ⅳ】

(1) 真数は正より $x>-2$

このとき $f(x)=\log(x+2)-x$ とすると $f'(x)=\dfrac{-(x+1)}{x+2}$ であるから

$f(x)$ の増減は次の表のようになる.

| $x$ | $(-2)$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ |

$f(-1)=1>0$ , $\displaystyle\lim_{x\to-2+0}f(x)=-\infty$, $\dfrac{5}{2}<e<3$ より $f(2)=\log 4-2<0$

$f(x)$ は $x>-2$ で連続なので $y=f(x)$ と $x$ 軸は異なる2点で交わる.　(証終)

また, 増減表から $-2<b<-1$　$\therefore\ m=-2$　(答)

$\dfrac{5}{2}<e<3$ より $f(1)=\log 3-1=\log 3-\log e>0$ , $f(2)<0$ より $1<c<2$

$\therefore\ n=1$　(答)

(2) $g(x)=\log(x+2)$ とすると $g(x)$ は $x>-2$ で微分可能かつ連続なので

区間 $[s,t]$ で平均値の定理から

$\dfrac{g(t)-g(s)}{t-s}=g'(u)$ $(s<u<t)$ をみたす $u$ が存在する.

このとき $\dfrac{\log(t+2)-\log(s+2)}{t-s}=\dfrac{1}{u+2}\cdots$①

また, $-2<s<u$ より $\dfrac{1}{u+2}<\dfrac{1}{s+2}\cdots$②

①, ②から $\dfrac{\log(t+2)-\log(s+2)}{t-s}<\dfrac{1}{s+2}$　(答)

(3) $a_1=0<c$ , $0\leqq a_n<c$ のとき $0<\log 2\leqq\log(a_n+2)<\log(c+2)=c$ から $0\leqq a_{n+1}<c$

ゆえにすべての自然数 $n$ で $0\leqq a_n<c$　よって $-2<a_n<c$ なので (2) から

$\left|\dfrac{a_{n+1}-c}{a_n-c}\right|=\dfrac{a_{n+1}-c}{a_n-c}=\dfrac{\log(a_n+2)-\log(c+2)}{a_n-c}<\dfrac{1}{a_n+2}\leqq\dfrac{1}{2}$　(答)

(4) (3) から $|a_{n+1}-c|<\dfrac{1}{2}|a_n-c|$ であるから $|a_n-c|<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}|a_1-c|$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$ , $|a_n-c|\geqq 0$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}|a_n-c|=0$　$\therefore\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=c$　(証終)

【工Ⅰ】

(1) $x_{n+1}-pq=\frac{p-1}{p}(x_n-pq)$

数列$\{x_n-pq\}$は初項$x_1-pq=a-pq$

公比$\frac{p-1}{p}$の等比数列

$x_n-pq=(a-pq)\left(\frac{p-1}{p}\right)^{n-1}$

$\therefore x_n=pq+(a-pq)\left(\frac{p-1}{p}\right)^{n-1}$ （答）

(2) $p>1$より$\left|\frac{p-1}{p}\right|<1$より$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{p-1}{p}\right)^{n-1}=0$だから

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=pq$ （答）

(3) $p=10,\ q=\frac{1}{10},\ a=0$のとき

$x_n=1-\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$

$x_2=\frac{1}{10},\ x_3=\frac{19}{100},\ x_4=\frac{271}{1000}$

(4) $x_n>0.99$のとき

$1-\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}>\frac{99}{100}$

$\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}<\frac{1}{100}$

$(n-1)(\log_{10}9-1)<-2$

$(n-1)(1-2\times0.4771)>2$

$n>1+\frac{2}{0.0458}=44+\frac{306}{458}$

最小の自然数$n$は$n=45$ （答）