# 2021年度鳥取大学医学部、工学部　数学解答

【医Ⅰ】

(1)　$2^k \leqq n < 2^{k+1}$ のとき，

$n = b_1 + 2b_2 + \cdots + 2^{k-1}b_k + 2^k$　と表されるので，

$a_n = b_1\left(\frac{1}{2}\right)^1 + b_2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + b_k\left(\frac{1}{2}\right)^k + \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$ ………①

また，$n - 2^k = b_1 + 2b_2 + \cdots + 2^{k-1}b_k$ より

$a_{n-2^k} = b_1\left(\frac{1}{2}\right)^1 + b_2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + b_k\left(\frac{1}{2}\right)^k$ ………②

①，②より

$$a_n = a_{n-2^k} + \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\text{(答)}$$

(2)　$2^k \leqq n < 2^{k+1}$ のとき，

$$a_n = b_1\left(\frac{1}{2}\right)^1 + b_2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + b_k\left(\frac{1}{2}\right)^k + \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

$$= \frac{2^k b_1 + 2^{k-1}b_2 + \cdots + 2b_k + 1}{2^{k+1}}$$

ここで，（$b_1$，$b_2$，…，$b_k$）の組は　$1 \leqq i \leqq k$ に対して，$b_i = 0$ または1より $2^k$ 個あり，また，$b_i = 1$ （$1 \leqq i \leqq k$）となる組は $2^{k-1}$ 個あるから，

$$\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} a_n = \frac{1}{2^{k+1}}\{(2^k + 2^{k-1} + \cdots + 2) \times 2^{k-1} + 1 \times 2^k\} = 2^{k-1}$$

$T_k = \displaystyle\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} a_k$ とすると

$$S_{130} = a_0 + a_1 + \sum_{k=1}^{6} T_k + a_{128} + a_{129} + a_{130}$$

ここで，(1)から $a_{128} = a_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^8$，$a_{129} = a_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^8$，$a_{130} = a_2 + \left(\frac{1}{2}\right)^8$　となるので，

$$S_{130} = \frac{16451}{256}\text{(答)}$$

(3)　$a_n = b_1\left(\frac{1}{2}\right)^1 + b_2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + b_k\left(\frac{1}{2}\right)^k + b_{k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$

$n = 2^k$ のとき　$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} < \frac{1}{4}$

$b_1 = 1$ または $b_2 = 1$ のとき，$a_n \geqq \frac{1}{4}$

また，$b_1 = b_2 = 0$ かつ $b_3 = b_4 = \cdots = b_k = 1$ のとき，

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\frac{1}{8}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}\right\}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^k < \frac{1}{4}$$

したがって

$n<2^k$ のとき　$b_1=b_2=0$

$b_3$，$b_4$，$\cdots b_k$ は $0$，$1$ の $2$ 通りあるから

$a_n$ のとり方は　$2^{k-2}$ 通り

よって, $a_n<\dfrac{1}{4}$　$(0\leqq n\leqq 2^k)$ となる項の数は　$2^{k-2}+1$(答)

【医Ⅱ】【工Ⅱ】

(1)　$z=\dfrac{\omega}{\omega+1}\cdot\dfrac{\overline{\omega+1}}{\overline{\omega+1}}=\dfrac{|\omega|^2+\omega}{|\omega+1|^2}=\dfrac{\omega+3}{|\omega+1|^2}$

$\omega=a+bi$ とすると，$z=\dfrac{1}{|\omega+1|^2}(a+3+bi)$　より

$$\mathrm{S}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{|\omega+1|^2}|(a+3)b-ab|=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{|\omega+1|^2}\cdot|3b|=\frac{3}{4}\frac{|\omega-\overline{\omega}|}{|\omega+1|^2}\text{(答)}$$

(2)　$\omega=\sqrt{3}(\cos\theta+i\sin\theta)$ とすると,

$$\mathrm{S}=\frac{3\sqrt{3}|\sin\theta|}{4(2+\sqrt{3}\cos\theta)}=\frac{3\sqrt{3}}{4}\left|\frac{\sin\theta}{2+\sqrt{3}\cos\theta}\right|$$

$f(\theta)=\dfrac{\sin\theta}{2+\sqrt{3}\cos\theta}$　$(0\leqq\theta<2\pi)$ とする。

$$f'(\theta)=\frac{\cos\theta(2+\sqrt{3}\cos\theta)-\sin\theta(-\sqrt{3}\sin\theta)}{(2+\sqrt{3}\cos\theta)^2}=\frac{2\cos\theta+\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3}\cos\theta)^2}$$

| $\theta$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{5}{6}\pi$ | $\cdots$ | $\frac{7}{6}\pi$ | $\cdots$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(\theta)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(\theta)$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $0$ |

$\mathrm{S}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}|f(\theta)|$　より　S は $\theta=\dfrac{5}{6}\pi$，$\dfrac{7}{6}\pi$ で最大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

また,

$\theta=\dfrac{5}{6}\pi$ のとき，$\dfrac{\omega}{z}=\omega+1=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi$

$\mathrm{OA}=\sqrt{3}$　$\mathrm{OB}=\left|\dfrac{\omega}{\omega+1}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$

△OABは頂角120°の二等辺三角形

$\theta=\dfrac{7}{6}\pi$ のとき，$\dfrac{\omega}{z}=\omega+1=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\left(-\dfrac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\dfrac{2}{3}\pi\right)$

---

OA$=\sqrt{3}$　OB$=\sqrt{3}$

△OABは頂角120°の二等辺三角形より

△$OAB$の面積が最大となるときの形状は$OA=OB=\sqrt{3}$,

$\angle AOB=120°$の二等辺三角形 (答)

【医Ⅲ】

(1)　$f'(x)=a^x\log a$ (答)

(2)　$0\leqq k\leqq 1$ のとき，$A^k\leqq a^k\leqq(A+1)^k$，$-1\leqq k\leqq 0$ のとき，$(A+1)^k\leqq a^k\leqq A^k$ より

$S(A)=\int_{-1}^{0}\{A^x-(A+1)^x\}dx+\int_0^1\{(A+1)^x-A^x\}dx$

$=\left[\dfrac{A^x}{\log A}-\dfrac{(A+1)^x}{\log(A+1)}\right]_{-1}^{0}+\left[\dfrac{(A+1)^x}{\log(A+1)}-\dfrac{A^x}{\log A}\right]_0^1$

$=\dfrac{2}{\log A}-\dfrac{2}{\log(A+1)}-\dfrac{1}{A\log A}+\dfrac{1}{(A+1)\log(A+1)}+\dfrac{A+1}{\log(A+1)}-\dfrac{A}{\log A}$ (答)

(3)　$S(A)\log A$

$$=2-2\frac{\log A}{\log(A+1)}-\frac{1}{A}+\frac{1}{A+1}\cdot\frac{\log A}{\log(A+1)}+(A+1)\cdot\frac{\log A}{\log(A+1)}-A$$

$\lim\limits_{A\to\infty}S(A)\log A$

$=\lim\limits_{A\to\infty}\left(2-2\dfrac{\log A}{\log(A+1)}-\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{A+1}\cdot\dfrac{\log A}{\log(A+1)}+\dfrac{\log A}{\log(A+1)}-\dfrac{\log\left(1+\frac{1}{A}\right)^A}{\log(A+1)}\right)$

ここで,

$\lim\limits_{A\to\infty}\dfrac{\log A}{\log(A+1)}$

$=\lim\limits_{A\to\infty}\dfrac{\log A}{\log A+\log\left(1+\frac{1}{A}\right)}$

$=\lim\limits_{A\to\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{\log\left(1+\frac{1}{A}\right)}{\log A}}=1$となるので

$\lim\limits_{A\to\infty}S(A)\log A=1$ (答)

# 2021年度鳥取大学医学部、工学部　数学解答

【医Ⅳ】

$$J_n=\int_0^p \frac{1-(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}dx$$

(1) $0<x<p$において$1+x^2>1$より

$$\frac{1}{1+x^2}<1$$

$$\therefore \int_0^p \frac{x^m}{1+x^2}dx<\int_0^p x^m dx=\left[\frac{1}{m+1}x^{m+1}\right]_0^p=\frac{p^{m+1}}{m+1}\leqq\frac{1}{m+1}$$

$$\therefore \int_0^p \frac{x^m}{1+x^2}dx<\frac{1}{m+1}$$ (答)

(2) $a_n=(-1)^{n-1}\dfrac{p^{2n-1}}{2n-1}$

$$S_n=\sum_{k=1}^n a_k$$

$$=\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}\frac{p^{2k-1}}{2k-1}$$

$$J_n-J_{n-1}$$

$$=\int_0^p \frac{-(-1)^n x^{2n}-\{-(-1)^{n-1}x^{2n-2}\}}{1+x^2}dx$$

$$=\int_0^p \frac{(-1)^{n-1}(x^{2n}+x^{2n-2})}{1+x^2}dx$$

$$=\int_0^p \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-2}(1+x^2)}{1+x^2}dx$$

$$=(-1)^{n-1}\int_0^p x^{2n-2}dx$$

$$=(-1)^{n-1}\left[\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}\right]_0^p$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{p^{2n-1}}{2n-1}$$

$=a_n$より

$$S_n=\sum_{k=1}^n (J_k-J_{k-1})$$

$$=J_n-J_0$$

$=J_n$ (答)

(3) (2)において$p=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$とすると

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{(2k-1)}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2k-1}$$

$$=\sqrt{3}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{(2k-1)3^k}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{(2k-1)3^{k-1}}$$

よって $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{(2k-1)3^{k-1}}=\sqrt{3}\,S_n=\sqrt{3}\,J_n$

$p=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき

$$J_n=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{dx}{1+x^2}-\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{\pi}{6}-\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}dx$$

(1)より

$$\left|J_n-\frac{\pi}{6}\right|=\left|\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{x^{2n}}{1+x^2}dx\right|\leqq\frac{1}{n+1}\to 0\quad (n\longrightarrow\infty)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}J_n=\frac{\pi}{6}$$

$$(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\sqrt{3}\,J_n$$

$$=\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6}\ (\text{答})$$

# 2021年度鳥取大学医学部、工学部　数学解答

---

【工Ⅰ】

(1) $a_6=0\times\left(\frac{1}{2}\right)^1+1\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+1\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}$

$a_7=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^1+1\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+1\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{7}{8}$

$a_8=0+0+0+1\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

$a_9=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^1+1\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{9}{16}$ (答)

(2)医学科Ⅰ(1)と同じ

(3)医学科Ⅰ(2)と同じ

【工Ⅱ】

医学科Ⅱと同じ

【工Ⅲ】

(1) $(y-r)^2+x^2=r^2$

$$x^2=r^2-(y-r)^2$$
$$=r^2-(y^2-2yr+r^2)$$
$$=2ry-y^2$$

$y=h$のとき

面積 $S=\pi x^2=\pi(2rh-h^2)$ (答)

体積 $V=\int_0^h\pi(2ry-y^2)dy$

$$V=\pi\left[ry^2-\frac{1}{3}y^3\right]_0^h$$
$$=\pi\left(rh^2-\frac{1}{3}h^3\right)\text{(答)}$$

(2) $V=\pi\left(rh^2-\frac{1}{3}h^3\right)$

$S=\pi(2rh-h^2)$

$\frac{dV}{dt}=a$

$\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{dV}{dh}\cdot\dfrac{dh}{dt}$ より $a=\pi(2rh-h^2)\dfrac{dh}{dt}$

$\therefore \dfrac{dh}{dt}=\dfrac{a}{\pi(2rh-h^2)}$

$h=\dfrac{1}{2}r$ のとき $v_1=\dfrac{a}{\pi\left\{2r\cdot\dfrac{1}{2}r-\left(\dfrac{1}{2}r\right)^2\right\}}$

$=\dfrac{4a}{3\pi r^2}$ (答)

$\dfrac{dS}{dt}=\dfrac{dS}{dh}\cdot\dfrac{dh}{dt}$

$=\pi(2r-2h)\cdot\dfrac{dh}{dt}$

$h=\dfrac{1}{2}r$ のとき

$v_2=\pi\left(2r-2\cdot\dfrac{1}{2}r\right)\cdot\dfrac{4a}{3\pi r^2}$

$=\dfrac{4a}{3r}$ (答)

【工Ⅳ】

(1)　$f'(x)=a^x\log a$ (答)

(2)　$0\leqq k\leqq 1$ のとき，$A^k\leqq a^k\leqq B^k$，$-1\leqq k\leqq 0$ のとき，$B^k\leqq a^k\leqq A^k$ より

求める面積をSとする

$S=\int_{-1}^{0}\{A^x-B^x\}dx+\int_{0}^{1}\{B^x-A^x\}dx$

$=\left[\dfrac{A^x}{\log A}-\dfrac{B^x}{\log B}\right]_{-1}^{0}+\left[\dfrac{B^x}{\log B}-\dfrac{A^x}{\log A}\right]_{0}^{1}$

$=\dfrac{2}{\log A}-\dfrac{2}{\log B}-\dfrac{1}{A\log A}+\dfrac{1}{B\log B}+\dfrac{B}{\log B}-\dfrac{A}{\log A}$

$=\dfrac{(B-1)^2}{B\log B}-\dfrac{(A-1)^2}{A\log A}$ (答)