【医Ⅰ】【工Ⅱ】

(1) $P_n=\dfrac{6n}{{}_{n+6}C_2}=\dfrac{12n}{(n+6)(n+5)}$

$\dfrac{P_{n+1}}{P_n}=\dfrac{12(n+1)}{(n+7)(n+6)}\cdot\dfrac{(n+6)(n+5)}{12n}=\dfrac{(n+1)(n+5)}{n(n+7)}$

$\dfrac{P_{n+1}}{P_n}\geqq 1$ とすると $n^2+6n+5\geqq n^2+7n$ より,

$n\leqq 5$

$\therefore\ P_1<P_2<P_3<P_4<P_5=P_6>P_7>\cdots$ となるので、 $n=5,6$ で P_n は最大となる

最大値は $P_5=P_6=\dfrac{12\times 5}{11\times 10}=\dfrac{6}{11}\cdots$(答)

(2) 条件をみたすとき,

箱 A から赤球を2個取り出し, 箱 B から赤球と白球を1個ずつ取り出す

または,

箱 A から赤球と白球を1個ずつ取り出し, 箱 B から赤球と白球を1個ずつ取り出す

$\therefore\ q_n=\dfrac{{}_6C_2}{{}_{n+6}C_2}\times\dfrac{2\times 4}{{}_6C_2}+\dfrac{6n}{{}_{n+6}C_2}\times\dfrac{1\times 5}{{}_6C_2}$

$=\dfrac{4n+16}{(n+6)(n+5)}$

$q_n<\dfrac{1}{3}$ より,

$12n+48<n^2+11n+30$

$n^2-n>18$

$n(n-1)>18$

$n\geqq 1$ で $n(n-1)$ は単調に増加し,

$n=4$ のとき $n(n-1)=12$

$n=5$ のとき $n(n-1)=20$

$\therefore$ 求める最小の n は5 …(答)

【医Ⅱ】

(1) $\cos\theta=x$ とすると, $\cos 2\theta=2x^2-1$, $\cos 3\theta=4x^3-3x$,

$\cos 4\theta=2\cos^2 2\theta-1=2(2x^2-1)^2-1$ より

与えられた方程式は

$4x^4+2x^3-3x^2-x=0$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $x \fallingdotseq 0$ なので, $4x^3+2x^2-3x-1=0$

$(x+1)(4x^2-2x-1)=0$

$$x=-1, \frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $0<x<1$ なので, $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ …(答)

別解 $\cos\theta+\cos 4\theta=2\cos\dfrac{5}{2}\theta\cos\dfrac{3}{2}\theta$

$\cos 2\theta+\cos 3\theta=2\cos\dfrac{5}{2}\theta\cos\dfrac{1}{2}\theta$ より

$\cos\dfrac{5}{2}\theta\left(\cos\dfrac{3}{2}\theta+\cos\dfrac{1}{2}\theta\right)=0$

$$2\cos\frac{5}{2}\theta\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}=0$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}, 0<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{4}, 0<\dfrac{5}{2}\theta<\dfrac{5}{4}\pi$ より

$\cos\dfrac{5}{2}\theta=0$

$\dfrac{5}{2}\theta=\dfrac{\pi}{2}$

$\theta=\dfrac{\pi}{5}$

$5\theta=\pi$

$3\theta=\pi-2\theta$

$\cos 3\theta=\cos(\pi-2\theta)$

$=-\cos 2\theta$

$\cos\theta=x$ とする

$4x^3-3x=-(2x^2-1)$

$4x^3+2x^2-3x-1=0$

$(x+1)(4x^2-2x-1)=0$, $x=-1, \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{4}$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $0<x<1$ なので, $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ …(答)

(2)　(1)より

$$a_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\ \beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ とすると

$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-1$ より

α,β は

$t^2-t-1=0$ の2解であるから,

$\alpha^2=\alpha+1,\ \beta^2=\beta+1$ より

$\alpha^{n+2}=\alpha^{n+1}+\alpha^n$ …①, $\beta^{n+2}=\beta^{n+1}+\beta^n$ …②

①+②より

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ …(答)

(3) $b_n=(-1)^n\left\{a_na_{n+2}-(a_{n+1})^2\right\}$ とおく.

$$\begin{aligned}
&b_{n+1}-b_n\\
&=(-1)^{n+1}\left\{a_{n+1}a_{n+3}-(a_{n+2})^2\right\}-(-1)^n\left\{a_na_{n+2}-(a_{n+1})^2\right\}\\
&=(-1)^{n+1}\left\{a_{n+1}a_{n+3}-(a_{n+2})^2+a_na_{n+2}-(a_{n+1})^2\right\}\\
&=(-1)^{n+1}\left\{a_{n+1}(a_{n+2}+a_{n+1})-(a_{n+2})^2+a_na_{n+2}-(a_{n+1})^2\right\}\\
&=(-1)^{n+1}\left\{a_{n+2}(a_{n+1}+a_n)-(a_{n+2})^2\right\}\\
&=(-1)^{n+1}\left\{(a_{n+2})^2-(a_{n+2})^2\right\}\\
&=0
\end{aligned}$$

$\therefore\ b_{n+1}=b_n$ より $b_n=b_1$ (定数) となるので題意は示された.

【医Ⅲ】【工Ⅲ】

(1) 求める面積を S とする

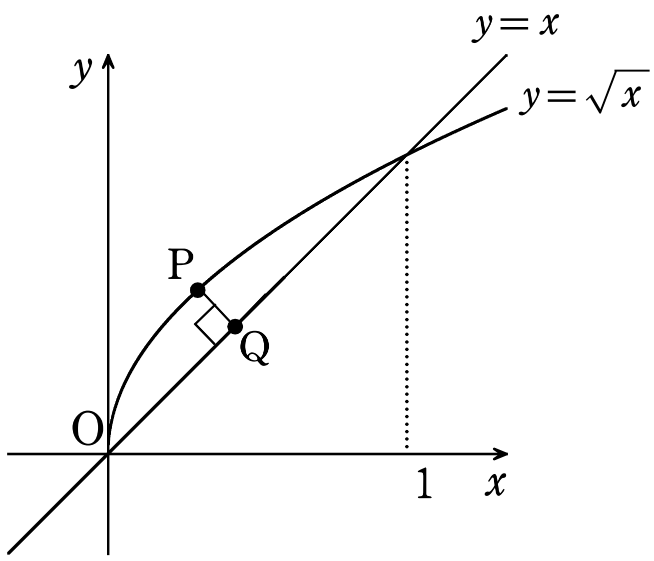
$$S=\int_0^1(\sqrt{x}-x)dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{6}\ \cdots(\text{答})$$

(2) 点と直線の距離の公式より

$$PQ=\frac{|\sqrt{x}-x|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{2}}\ (\because\ 0\leqq x\leqq 1\ \text{のとき}\ \sqrt{x}\geqq x\ )\cdots(\text{答})$$

(3) 求める体積を V とし,

$OQ=s\ (0 \leqq s \leqq \sqrt{2})$ とする.



$V=\int_0^{\sqrt{2}} \pi (PQ)^2 ds$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}s-x,\ \frac{1}{\sqrt{2}}s-\sqrt{x}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \perp \ell$ なので ℓ の方向ベクトルを

$\vec{a}=(1, 1)$ とすると,

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \vec{a}=0$

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}s-x\right)\cdot 1+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}s-\sqrt{x}\right)\cdot 1=0$

$s=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+\sqrt{x})$

$\frac{ds}{dx}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

s	$0 \to \sqrt{2}$
x	$0 \to 1$

$\therefore\ V=\pi\int_0^1 \left(\frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx$

$=\frac{\sqrt{2}}{60}\pi$ …(答)

【医Ⅳ】

(1) $I_0=\int_0^x e^{-t}dt=\left[-e^{-t}\right]_0^x$

$=-(e^{-x}-1)$

$=-e^{-x}+1$

$I_1=\int_0^x te^{-t}dt$

$=\int_0^x t(-e^{-t})'dt$

$=\left[-te^{-t}\right]_0^x+\int_0^x e^{-t}dt$

$=-xe^{-x}-e^{-x}+1$ …(答)

(2) $I_n=\int_0^x t^n(-e^{-t})'dt$

$=\left[-t^n e^{-t}\right]_0^x+n\int_0^x t^{n-1}e^{-t}dt$

$=-x^n e^{-x}+nI_{n-1}$ …(答)

(3)　(2)より

$I_{n+1}=(n+1)I_n-x^{n+1}e^{-x}$

両辺を $(n+1)!$ で割ると

$\dfrac{I_{n+1}}{(n+1)!}=\dfrac{I_n}{n!}-\dfrac{e^{-x}}{(n+1)!}x^{n+1}$

$n\geqq 1$ のとき

$\dfrac{I_n}{n!}=\dfrac{I_0}{0!}-e^{-x}\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}$

$=1-e^{-x}-e^{-x}\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}$

$=1-e^{-x}\left(1+\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right)$

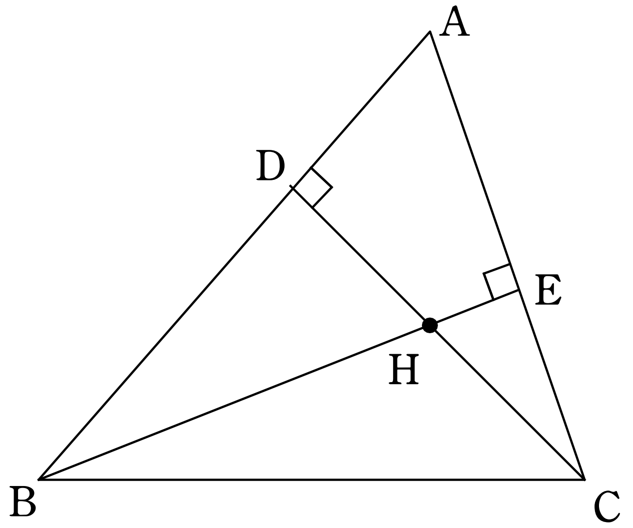
$=1-e^{-x}\left(1+\sum_{l=1}^{n}\dfrac{x^l}{l!}\right)$

$=1-e^{-x}\sum_{l=0}^{n}\dfrac{x^l}{l!}$

$n=0$ のときも成立する.

$\therefore\ I_n=n!\left(1-e^{-x}\sum_{l=0}^{n}\dfrac{x^l}{l!}\right)$ …(答)

【工Ⅰ】



図のように2点D,Eをとる.

点Hは△ABCの垂心なので$\angle ADC = \angle AEB = 90°$

また$\angle A = 60°$より

$AD = 6\cos 60° = 3$

$AE = 8\cos 60° = 4$

$\therefore\ BD = 5, CE = 2$

△ACDと直線BEでメネラウスの定理より

$$\frac{4}{2} \times \frac{5}{8} \times \frac{HC}{DH} = 1$$

$$\frac{HC}{DH} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{AH}} = \frac{4\overrightarrow{\mathrm{AD}} + 5\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{9}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \dfrac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より

$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \dfrac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ …(答)

【工Ⅳ】

(1) $I_0 = \dfrac{1}{0!}\displaystyle\int_0^x e^{-t}dt = \Big[-e^{-t}\Big]_0^x$

$= -(e^{-x} - 1)$

$= -e^{-x} + 1$

$I_1 = \dfrac{1}{1!}\displaystyle\int_0^x te^{-t}dt$

$= \displaystyle\int_0^x t(-e^{-t})'dt$

$= \Big[-te^{-t}\Big]_0^x + \displaystyle\int_0^x e^{-t}dt$

$= -xe^{-x} - e^{-x} + 1$ …(答)

(2) $I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^x t^n(-e^{-t})'dt$

$= \dfrac{1}{n!}\Big[-t^n e^{-t}\Big]_0^x + \dfrac{1}{(n-1)!}\displaystyle\int_0^x t^{n-1}e^{-t}dt$

$= \dfrac{-x^n e^{-x}}{n!} + I_{n-1}$ …(答)

(3)　(2)より

$$I_{n+1}=I_n-\frac{x^{n+1}e^{-x}}{(n+1)!}$$

$n\geqq 1$ のとき

$$\begin{aligned}I_n&=I_0-e^{-x}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\\&=1-e^{-x}-e^{-x}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\\&=1-e^{-x}\left(1+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right)\\&=1-e^{-x}\left(1+\sum_{l=1}^{n}\frac{x^{l}}{l!}\right)\\&=1-e^{-x}\sum_{l=0}^{n}\frac{x^{l}}{l!}\end{aligned}$$

$n=0$ のときも成立する.

$\therefore\ I_n=1-e^{-x}\sum_{l=0}^{n}\frac{x^{l}}{l!}$ …(答)