【医Ⅰ】

(1) $\{a_n\}$ の公比を r とすると,

$$a_n=2560r^{n-1}$$

$a_1+a_2+a_3=4480$ から,

$$2560+2560r+2560r^2=4480$$

$$1+r+r^2=\frac{7}{4}$$

$$r^2+r-\frac{3}{4}=0$$

$$4r^2+4r-3=0$$

$$(2r+3)(2r-1)=0$$

$$r=-\frac{3}{2},\frac{1}{2}$$

条件①より $r>0$ なので $r=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ a_n=2560\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ …(答)

(2) (1)より $n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}S_n-S_{n-1}&=\log_2 a_n\\&=\log_2 2560\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\&=\log_2 2560+(n-1)\log_2\frac{1}{2}\\&=-n+10+\log_2 5\end{aligned}$$

ここで $\log_2 a_n>0 \Leftrightarrow n<10+\log_2 5$

$\log_2 4<\log_2 5<\log_2 8$ なので,

$2<\log_2 5<3$ より $12<10+\log_2 5<13$

$\therefore\ \begin{cases}S_n>S_{n-1}(2\leqq n\leqq 12)\\ S_n<S_{n-1}(13\leqq n)\end{cases}$ より $S_1<S_2<\dots<S_{11}<S_{12}>S_{13}>\dots$ となるので, S_n を最大にする n の値は $n=12$ …(答)

(3) $\{\log_2 a_n\}$ は初項 $9+\log_2 5$, 公差 -1 の等差数列より

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2(9+\log_2 5)+(n-1)(-1)\}$$

$=\dfrac{1}{2}n(-n+19+2\log_2 5)$

$f(x)=\dfrac{1}{2}x(-x+19+2\log_2 5)$ とすると, $y=|f(x)|$ のグラフは図のようになる.

ここで $\log_2 5=\dfrac{\log_{10}5}{\log_{10}2}=\dfrac{1-\log_{10}2}{\log_{10}2}=2.322...$ より

$19+2\log_2 5=23.64...$ なので, $|S_1|, |S_{23}|, |S_{24}|$ のいずれかが最小となる

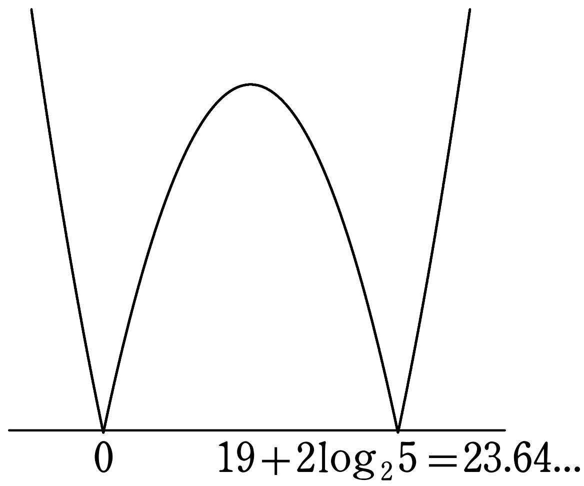
$S_1=\dfrac{1}{2}(18+2\log_2 5)=9+\log_2 5=11.32...$

$S_{23}=\dfrac{1}{2}\cdot 23(-4+2\log_2 5)$

$=23(\log_2 5-2)=7.40...$

$S_{24}=\dfrac{1}{2}\cdot 24(-5+2\log_2 5)=-4.27...$

$\therefore$ $|S_n|$ が最小となる n の値は $n=24$…(答)



【医Ⅱ】【工Ⅲ】

$x=e^{at}\cos t.\ y=e^{at}\sin t$

(1) $\dfrac{dx}{dt}=ae^{at}\cos t-e^{at}\sin t$…(答)

$\dfrac{dy}{dt}=ae^{at}\sin t+e^{at}\cos t$…(答)

(2) $|\vec{v}|^2=\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2$

$=e^{2at}(a^2+1)$

$|\vec{v}|\geqq 0$ より

$|\vec{v}|=e^{at}\sqrt{a^2+1}$…(答)

(3) $\vec{p}=e^{at}(\cos t,\sin t)$

$\vec{v}=e^{at}(a\cos t-\sin t, a\sin t+\cos t)$より

$\vec{p}\cdot\vec{v}=e^{2at}(a\cos^2 t-\sin t\cos t+a\sin^2 t+\sin t\cos t)=ae^{2at}$

$|\vec{p}|=e^{at}$

$|\vec{v}|=e^{at}\sqrt{a^2+1}$ より

$\cos\theta=\dfrac{a\cdot e^{2at}}{e^{at}\cdot e^{at}\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$

$\therefore$ θ は t によらない定数…(答)

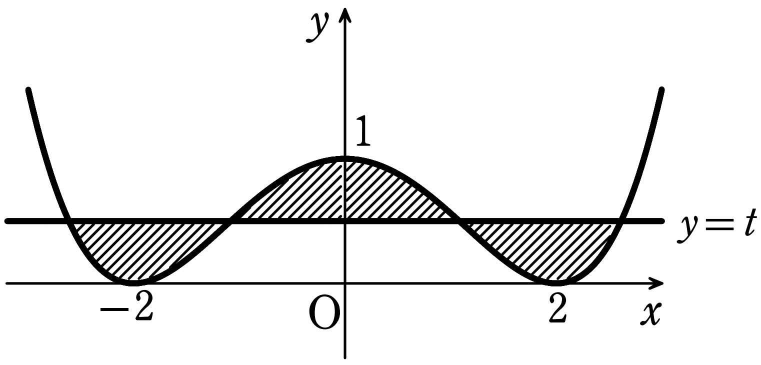
(4) $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ から

$2a=\sqrt{3}\sqrt{a^2+1}$

$\therefore$ $a\geqq 0$ かつ $4a^2=3(a^2+1)$ より$a=\sqrt{3}$ …(答)

【医Ⅲ】【工Ⅳ】

$f(x)=\dfrac{1}{16}(x+2)^2(x-2)^2$



(1) $f(x)=t$とすると

$(x^2-4)^2=16t$

$t\geqq 0$ より

$x^2-4=\pm 4\sqrt{t}$

$x^2=4\pm 4\sqrt{t}$

$\therefore k^2=4\pm 4\sqrt{t}$ …(答)

(2) $y=\dfrac{1}{16}(x^2-4)^2$ から

$(x^2-4)^2=16y$

$x^2=4\pm 4\sqrt{y}$

ここで $x_1{}^2=4+4\sqrt{y}$

$x_2{}^2=4-4\sqrt{y}$ とする

$f(-x)=f(x)$ なので $y=f(x)$ は y 軸に関して対称であるから

$V(t)=\pi\int_0^t x_1{}^2dy-\pi\int_0^t x_2{}^2dy+\pi\int_t^1 x_2{}^2dy$

$=8\pi\int_0^t\sqrt{y}\,dy+4\pi\int_t^1(1-\sqrt{y})dy$

$=8\pi\left[\dfrac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^t+4\pi\left[y-\dfrac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_t^1$

$=8\pi t\sqrt{t}-4\pi t+\frac{4}{3}\pi$ …(答)

(3) $\frac{d}{dt}V(t)=8\pi\cdot\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}-4\pi$

$\frac{d}{dt}V(t)=0$ とすると $t=\frac{1}{9}$ であり

$t>\frac{1}{9}$ のとき $\frac{d}{dt}V(t)>0$ となる

t	0	…	$\frac{1}{9}$	…	1
$\frac{d}{dt}V(t)$		$-$	0	$+$	
$V(t)$		↘		↗	

増減表から

$t=\frac{1}{9}$ で最小となる

$V\left(\frac{1}{9}\right)=8\pi\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3}-4\pi\cdot\frac{1}{9}+\frac{4}{3}\pi$

$=\frac{32}{27}\pi$

【医Ⅳ】

(1) $y'=\frac{1}{a}x$ より n_t の傾きは $-\frac{a}{t}$

$\therefore\ y=-\frac{a}{t}(x-t)+\frac{t^2}{2a}$

$y=-\frac{a}{t}x+a+\frac{t^2}{2a}$ …(答)

(2) n_t と x 軸とのなす角を θ とすると l_t の傾きは $\tan\left(2\theta-\frac{\pi}{2}\right)$ である

$\tan\theta=-\frac{a}{t}$ なので

$\tan\left(2\theta-\frac{\pi}{2}\right)$

$=-\dfrac{1}{\tan 2\theta}$

$=-\dfrac{1-\tan^2\theta}{2\tan\theta}$

$=-\dfrac{1-\dfrac{a^2}{t^2}}{-\dfrac{2a}{t}}$

$=\dfrac{t^2-a^2}{2at}$ …(答)

(3) l_t は傾き $\dfrac{t^2-a^2}{2at}$ で,点 $\left(t,\dfrac{t^2}{2a}\right)$ を通る直線なので

l_t の方程式は$y=\dfrac{t^2-a^2}{2at}x+\dfrac{a}{2}$ となる

$2ayt=xt^2-a^2x+a^2t$

$xt^2+a(a-2y)t-a^2x=0$

t についての恒等式とみて

$x=0$ かつ $a(a-2y)=0$ かつ $a^2x=0$

$a\neq 0$ より

$x=0$ かつ $y=\dfrac{a}{2}$

$\therefore$ 定点 $\left(0,\dfrac{a}{2}\right)$ を通る…(答)

【工Ⅰ】

(1)$t^2=1+2\sin\theta\cos\theta$ より

$\sin 2\theta=t^2-1$

$f(\theta)=t^2-1+\sqrt{2}\,t$

$=t^2+\sqrt{2}\,t-1$ …(答)

(2)$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{4}<2\pi+\dfrac{\pi}{4}$ より

$-1\leqq\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$

$\therefore\ -\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ …(答)

(3)$f(\theta)=\left(t+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\dfrac{3}{2}$

$-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$ より

$t=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ で最小値 $-\dfrac{3}{2}$

$t=\sqrt{2}$ で最大値 3

$t=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{2}$

$\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{7}{6}\pi, \dfrac{11}{6}\pi$

$\theta=\dfrac{11}{12}\pi, \dfrac{19}{12}\pi$

$t=\sqrt{2}$ のとき$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$

$\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$

$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

$\therefore\ \theta=\dfrac{11}{12}\pi, \dfrac{19}{12}\pi$ で最小値 $-\dfrac{2}{3}$ …(答)

$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ で最大値 3 …(答)

【工Ⅱ】

$a_1=512=2^9$

$a_1+a_2+a_3=a_1(1+r+r^2)=896$ から,

$$1+r+r^2=\frac{896}{512}=\frac{2^7\cdot 7}{2^9}=\frac{7}{4}$$

$$1+r+r^2=\frac{7}{4}$$

$$4r^2+4r-3=0$$

$$(2r+3)(2r-1)=0$$

$r>0$ より $r=\dfrac{1}{2}$

(1)$a_n=2^9\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=2^{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$…(答)

(2)$b_n=\log_2 a_n=\log_2 2^{10-n}=10-n$ …(答)

(3)$S_n=\sum_{k=1}^{n} b_k$

$=\sum_{k=1}^{n}(10-k)$

$=10n-\dfrac{n(n+1)}{2}$

$=-\dfrac{1}{2}n^2+\dfrac{19}{2}n$

$=-\dfrac{1}{2}(n^2-19n)$

$=-\dfrac{1}{2}\left(n-\dfrac{19}{2}\right)^2+\dfrac{361}{8}$

$n=9,10$ のとき最大で 45 …(答)

(4)$n=19$ のとき $S_n=0$ となり $|S_n|$ は最小

$\therefore\ n=19$ …(答)