【医Ⅰ】

(1)求める速さを v とする

$y=e^{2x}-1$ より $x=\dfrac{1}{2}\log(y+1)$ なので

t 分後の容器の体積を $V(t)$ とすると

$$V(t)=\pi\int_0^{y(t)}\left\{\frac{1}{2}\log(y+1)\right\}^2 dy$$

両辺を t で微分して

$$\frac{d}{dt}V(t)=\pi\left\{\frac{1}{2}\log(y(t)+1)\right\}^2\cdot\frac{d}{dt}y(t)$$

$\dfrac{d}{dt}V(t)=a\pi$ なので, $y(t)=b$ のとき

$$a\pi=\pi\left\{\frac{1}{2}\log(b+1)\right\}^2 v$$

$$v=\frac{4a}{\{\log(b+1)\}^2}\ \cdots(\text{答})$$

(2) $S(t)=\pi\cdot\dfrac{1}{4}\{\log(y(t)+1)\}^2$ より

$$\frac{d}{dt}S(t)=\frac{\pi}{4}\cdot 2\log(y(t)+1)\cdot\frac{1}{y(t)+1}\cdot\frac{d}{dt}y(t)$$

$y(t)=b$ のとき

$$\frac{d}{dt}S(t)=\frac{\pi}{2}\log(b+1)\cdot\frac{1}{b+1}\cdot\frac{4a}{\{\log(b+1)\}^2}$$

$$=\frac{2a\pi}{(b+1)\log(b+1)}\ \cdots(\text{答})$$

【医Ⅱ】【工Ⅲ】

(1) $x_{n+1}=x_n+\left(\frac{1}{2}\right)^n$ なので

$n\geqq 2$ のとき

$$x_n=x_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

これは $n=1$ でも成立

$$\therefore\ x_n=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$y_{n+1}=y_n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ なので

$n\geqq 2$ のとき

$$y_n=y_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

$$=3-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

これは $n=1$ でも成立

$$\therefore\ y_n=3-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ \left(2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ 3-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$ …(答)

(2) $x_1=1,\ x_2=\frac{3}{2},\ x_3=\frac{7}{4}>\frac{3}{2}$

$\therefore\ n=3$ …(答)

(3) $\overrightarrow{p_1}\cdot\overrightarrow{p_n}$

$=5-3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ …(答)

$\lim_{n\to\infty}\overrightarrow{p_1}\cdot\overrightarrow{p_n}=5$ …(答)

(4) $d_n=\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{2}}$

$\lim_{n\to\infty}d_n=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ …(答)

【医Ⅲ】【工Ⅳ】※工Ⅳは（１）のみ

(1) $A = (1 + |\alpha|^2)|z|^2 - \alpha z - \overline{\alpha}\,\overline{z} + 1$

$$= (1 + |\alpha|^2)\left|z - \frac{\overline{\alpha}}{1 + |\alpha|^2}\right|^2 + \frac{1}{1 + |\alpha|^2}$$

$1 + |\alpha|^2 > 0$ なので

$z = \dfrac{\overline{\alpha}}{1 + |\alpha|^2}$ で最小値 $\dfrac{1}{1 + |\alpha|^2}$ …(答)

(2) $B = (1 + |\alpha|^2 + |\beta|^2)|z|^2 - (\alpha + \beta)z - (\overline{\alpha} + \overline{\beta})\overline{z} + 2$

ここで $K = 1 + |\alpha|^2 + |\beta|^2, w = \alpha + \beta$ とおくと、

$B = K|z|^2 - wz - \overline{w}\,\overline{z} + 2$

$$= K\left|z - \frac{\overline{w}}{K}\right|^2 - \frac{|w|^2}{K} + 2$$

$K > 0$ より $z = \dfrac{\overline{w}}{K} = \dfrac{\overline{\alpha} + \overline{\beta}}{1 + |\alpha|^2 + |\beta|^2}$ で最小値

$2 - \dfrac{|w|^2}{K} = 2 - \dfrac{|\alpha + \beta|^2}{1 + |\alpha|^2 + |\beta|^2}$ …(答)

【医Ⅳ】

(1) $\triangle AOB = \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a}\right|$ …(答)

(2) $\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{5}{4}\pi$ において

$\sin\theta > \cos\theta$ であるから

$b > a > 0$

$\therefore \dfrac{b}{a} > 1 > \dfrac{a}{b}$ なので、

$\triangle AOB = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b}{a} - \dfrac{a}{b}\right)$

$\therefore f(\theta) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\theta + \sqrt{2}}{\cos\theta + \sqrt{2}} - \dfrac{\cos\theta + \sqrt{2}}{\sin\theta + \sqrt{2}}\right)$

$t = \dfrac{\sin\theta + \sqrt{2}}{\cos\theta + \sqrt{2}}$ とすると

$f(\theta) = \dfrac{1}{2}\left(t - \dfrac{1}{t}\right)$ （$= g(t)$ とおく）

$g'(t) = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{t^2}\right) > 0$

$\therefore g(t)$ は単調に増加する

ここで $\dfrac{dt}{d\theta} = \dfrac{2\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) + 1}{(\cos\theta + \sqrt{2})^2}$

θ	$\frac{\pi}{4}$	…	$\frac{11}{12}\pi$	…	$\frac{5}{4}\pi$
$\frac{dt}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
t	1	↗	$2 + \sqrt{3}$	↘	1

増減表から $1 < t \leqq 2 + \sqrt{3}$

$\therefore t = 2 + \sqrt{3}$ つまり $\theta = \dfrac{11}{12}\pi$ のとき最大値

$g(2 + \sqrt{3}) = \dfrac{1}{2}\left(2 + \sqrt{3} - \dfrac{1}{2 + \sqrt{3}}\right) = \sqrt{3}$ …(答)

【工Ⅰ】

(1)円 C_2 の方程式は

$(x-2)^2+y^2=4$ より

点 (α,β) における接線の方程式は

$(\alpha+2)(x+2)+\beta y=4$

$\therefore\ (\alpha+2)x+\beta y+2\alpha=0$ …① (答)

(2)①が円 C_1 に接するとき

$$\frac{|2(\alpha+2)+2\alpha|}{\sqrt{(\alpha+2)^2+\beta^2}}=1$$

$4|\alpha+1|=\sqrt{(\alpha+2)^2+\beta^2}$ …②

(α,β) は円 C_2 上の点だから

$(\alpha+2)^2+\beta^2=4$ …③

②に代入して

$4|\alpha+1|=2$

$$\alpha=-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}$$

③より

$\alpha=-\dfrac{1}{2}$ のとき $\beta=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

$\alpha=-\dfrac{3}{2}$ のとき $\beta=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

①に代入して求める共通接線の方程式は

$\dfrac{3}{2}x\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}y-1=0,\ \dfrac{1}{2}x\pm\dfrac{\sqrt{15}}{2}y-3=0$…(答)

【工Ⅱ】

(1) $\dfrac{2}{5} \times \dfrac{9}{10} + \dfrac{3}{5} \times \dfrac{1}{20} = \dfrac{39}{100}$

(2) $\dfrac{\dfrac{2}{5} \times \dfrac{9}{10}}{\dfrac{2}{5} \times \dfrac{9}{10} + \dfrac{3}{5} \times \dfrac{1}{20}} = \dfrac{36}{39} = \dfrac{12}{13}$

(3) AI が梨と判定したとき、実際はりんごであるのは $\dfrac{1}{13}$ 、

2 回梨と判定したとき、2 回ともりんごであるのは $\left(\dfrac{1}{13}\right)^2$

従って少なくとも 1 回は実際に梨であるのは

$1 - \left(\dfrac{1}{13}\right)^2 = \dfrac{168}{169}$ …(答)